MAGAZINE D'EXERCICES

Etude des fonctions

EXERCICE N°1 : 6 points 25 '

Soit f la fonction définie sur $]-1,1[$ par: $f(x)=-1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

et ζ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) a) Justifier que f est dérivable sur $]-1,1[$ et que: $f'(x)=\frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^3}$

b) Dresser le tableau de variation de f

2) a) Montrer que I(0 , - 1) est un point d'inflexion de ζ_f

b) Donner une équation cartésienne de la tangente à ζ_f au point I

c) Montrer que I est un centre de symétrie pour ζ_f

3) Tracer ζ_f en précisant les asymptotes

4) a) Montrer que f réalise une bijection de $[0,1[$ sur un intervalle J à préciser

b) Calculer $(f^{-1})'(-1)$

c) Expliciter $f^{-1}(x)$ *pour tout* $x \in J$.

EXERCICE N°2: 6 points 25 '

Soit f la fonction définie par: $\begin{cases} f(x)=x+1+\sqrt{x^2-1} & si\ \ x<-1 \\ f(x)=\frac{1}{2}(2-x)\sqrt{x+1} & si\ \ x\geq -1 \end{cases}$

1) a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Etudier la dérivabilité de f en (-1). Interpréter le résultat graphiquement.

c) Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

d) Calculer $f'(x)$, pour tout réel $x \neq -1$

e) Dresser le tableau de variations de f.

: 23390248 - 29862267

Tous droits réservés © TakiAcademy.com

2) On désigne par g la restriction de f à $]-\infty,-1[$

a) Montrer que g réalise une bijection de $]-\infty,-1[$ sur $]0,1[$.

On note g^{-1} la bijection réciproque de g.

b) Déterminer $g^{-1}(x)$; pour tout $x \in]0,1[$.

c) Construire dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$ les courbe $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}^{-1}$ de f et g^{-1}.

3) On considère la fonction h définie sur $[0,1]$ par : h(x) = f(x) – x

Montrer que l'équation h(x) = 0 admet une solution unique α .

Encadrer α au dixième près.

4) Soit U la suite définie par $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = f(U_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout x$\in$ $[0,1]$; $|f'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}|U_n - \alpha|$.

c) En déduire que la suite U est convergente vers α.

Tous droits réservés © TakiAcademy.com